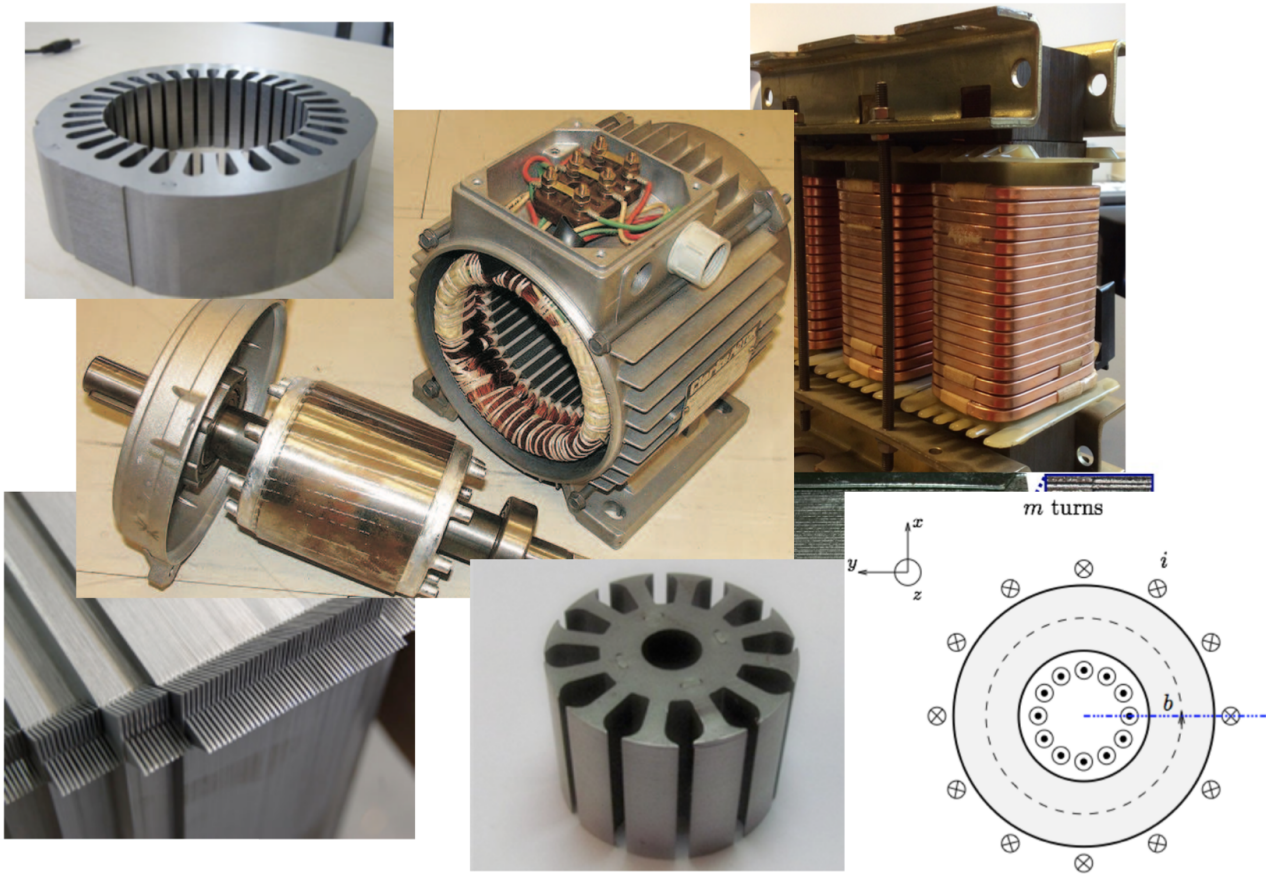
Homogénéisation computationnelle des problèmes électromagnétiques

I. Niyonzima

Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, G2ELab, F-38000 Grenoble, France

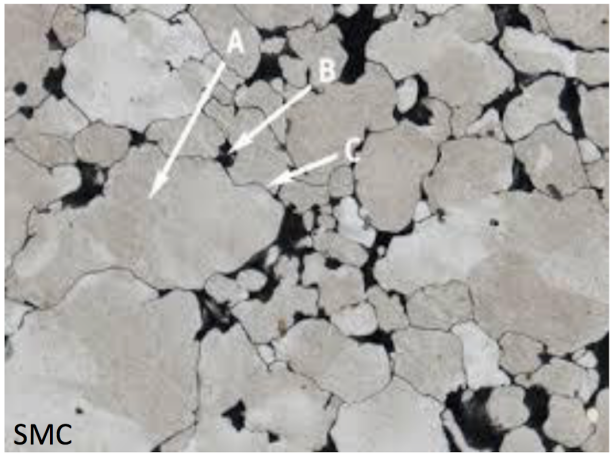
Journée thématique “Multi-échelle” en génie électrique,
15 Décembre 2021

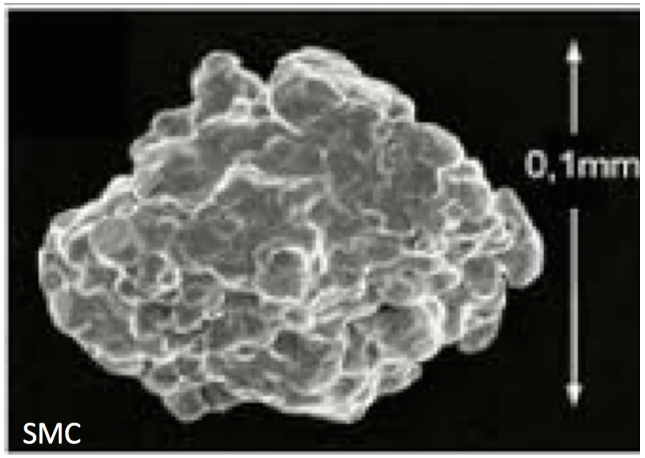
Convertisseurs d'énergie: structures laminées [1]

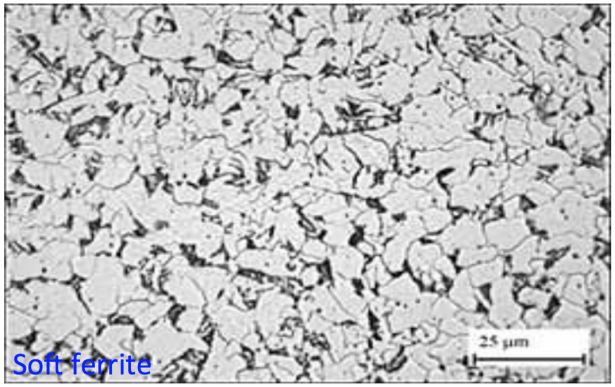


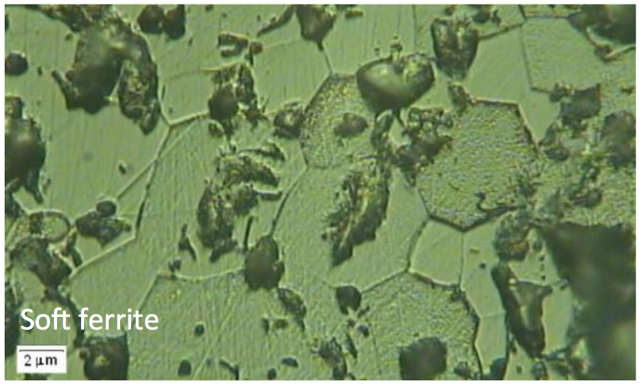
[1] R. V. Sabariego, "Homogenization techniques accounting for eddy currents in electromagnetic devices – Latest developments", Colloque Couplages Numériques, 2016

Convertisseurs d'énergie: composites magnétiques [2]





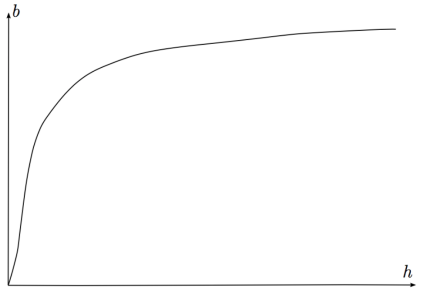




[2] I. Niyonzima, *Multiscale Finite Element Modeling of Nonlinear Quasistatic Electromagnetic Problems*, Ph.D. thesis, Université de Liège, Belgium, 2014

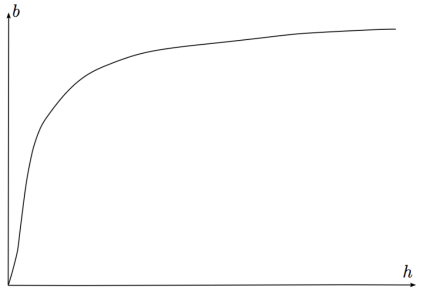
Enjeux de modélisation des composites magnétiques

Présence de matériaux non-linéaires

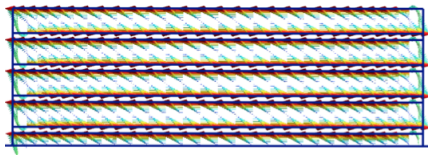


Enjeux de modélisation des composites magnétiques

Présence de matériaux non-linéaires

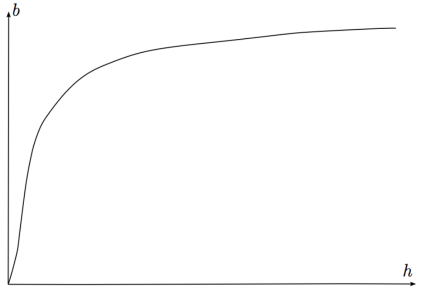


Problèmes avec des courants induits

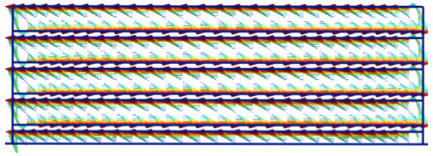


Enjeux de modélisation des composites magnétiques

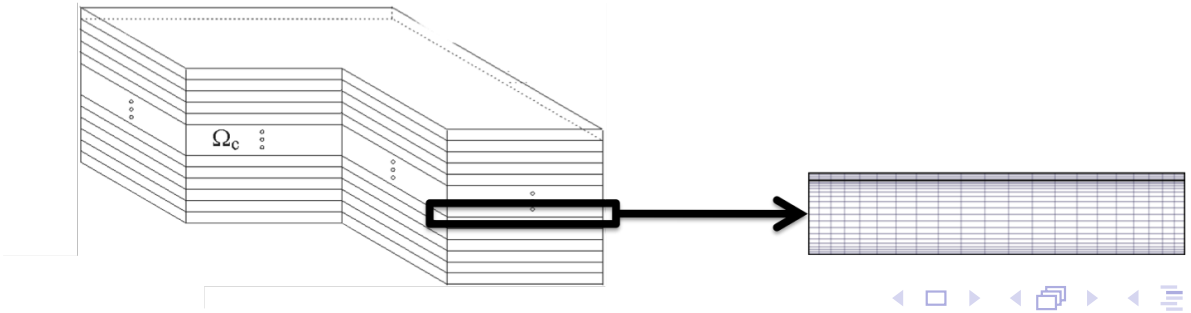
Présence de matériaux non-linéaires



Problèmes avec des courants induits



Matériaux multi-échelles $\rightarrow$ modèles numériques très coûteux



1 Méthodes multi-échelles

2 Formulation h-conforme
- Problème de référence
- Formulations multi-échelles

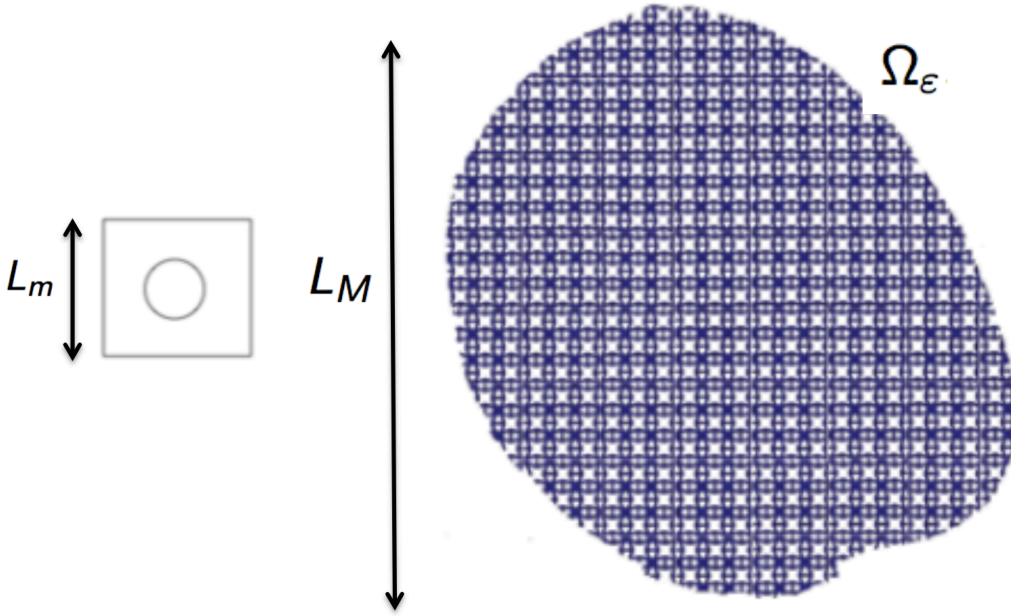
3 Applications numériques
- Empilement de tôles 2D
- Empilement de tôles 3D

4 Conclusion et Perspectives

Hypothèse de base : séparation d'échelles

Séparation d'échelle "géometrique" $\varepsilon = \dfrac{L_m}{L_M} \ll 1$.

L_m : longueur caractéristique méso,
L_M : longueur caractéristique macro/longueur d'onde du terme source.



Hypothèse de base : séparation d'échelles

Analyse adimensionnelle et séparation d'échelle.

En présence de matériaux linéaires, on peut dériver l'équation

$$\epsilon \partial_{tt}^2 \boldsymbol{e} + \sigma \partial_t \boldsymbol{e} + \mathbf{curl}\left(\mu^{-1} \mathbf{curl}\, \boldsymbol{e}\right) = -\partial_t \boldsymbol{j}_s \quad \text{dans } \Omega \tag{1}$$

avec les conditions au limites appropriées.

Hypothèse de base : séparation d'échelles

Analyse adimensionnelle et séparation d'échelle.

En présence de matériaux linéaires, on peut dériver l'équation

$$\epsilon \partial_{tt}^2 \boldsymbol{e} + \sigma \partial_t \boldsymbol{e} + \mathbf{curl}\left(\mu^{-1} \mathbf{curl}\, \boldsymbol{e}\right) = -\partial_t \boldsymbol{j}_s \quad \text{dans } \Omega \tag{1}$$

avec les conditions au limites appropriées.

On peut définir $\mu = \mu_c \bar{\mu}$, $\epsilon = \epsilon_c \bar{\epsilon}$, $\sigma = \sigma_c \bar{\sigma}$, $\boldsymbol{e} = E_c \bar{\boldsymbol{e}}$, $t = T_c\, \bar{t}$ et $x_i = L_c\, \bar{x}_i$. Les grandeurs barrées sont adimensionnelles et celles avec l'indice $_c$ sont des grandeurs caractéristiques.

Hypothèse de base : séparation d'échelles

Analyse adimensionnelle et séparation d'échelle.

En présence de matériaux linéaires, on peut dériver l'équation

$$\epsilon \partial_{tt}^2 \boldsymbol{e} + \sigma \partial_t \boldsymbol{e} + \mathbf{curl}\left(\mu^{-1}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{e}\right) = -\partial_t \boldsymbol{j}_s \quad \text{dans } \Omega \tag{1}$$

avec les conditions au limites appropriées.

On peut définir $\mu = \mu_c \bar{\mu}$, $\epsilon = \epsilon_c \bar{\epsilon}$, $\sigma = \sigma_c \bar{\sigma}$, $\boldsymbol{e} = E_c \bar{\boldsymbol{e}}$, $t = T_c\, \bar{t}$ et $x_i = L_c\, \bar{x}_i$. Les grandeurs barrées sont adimensionnelles et celles avec l'indice $_c$ sont des grandeurs caractéristiques. On a ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) = \frac{1}{T_c}\frac{\partial}{\partial \bar{t}}(\cdot)\ ,\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\cdot) = \frac{1}{T_c^2}\frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2}(\cdot) \ \text{ et}$$

$$\mathbf{curl}_x\left(\mu^{-1}\mathbf{curl}_x\,\boldsymbol{e}\right) = \frac{\mu_c^{-1}\,E_c}{L_c^2}\mathbf{curl}_{\bar{x}}\left(\bar{\mu}^{-1}\mathbf{curl}_{\bar{x}}\,\bar{\boldsymbol{e}}\right) \tag{2}$$

Hypothèse de base : séparation d'échelles

Analyse adimensionnelle et séparation d'échelle.

L'équation (1) devient:

$$\frac{\mu_c \epsilon_c}{T_c^2} E_c \left(\bar{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} \bar{\boldsymbol{e}} \right) + \frac{\mu_c \sigma_c}{T_c} E_c \left(\bar{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{\boldsymbol{e}} \right) + \frac{1}{L_c^2} E_c \mathbf{curl}_{\bar{\boldsymbol{x}}} \left(\bar{\mu}^{-1} \mathbf{curl}_{\bar{\boldsymbol{x}}} \bar{\boldsymbol{e}} \right) = -\frac{\mu_c J_c}{T_c} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{\boldsymbol{j}}_s. \quad (3)$$

Hypothèse de base : séparation d'échelles

Analyse adimensionnelle et séparation d'échelle.

L'équation (1) devient:

$$\frac{\mu_c \epsilon_c}{T_c^2} E_c \left(\bar{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} \bar{\boldsymbol{e}} \right) + \frac{\mu_c \sigma_c}{T_c} E_c \left(\bar{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{\boldsymbol{e}} \right) + \frac{1}{L_c^2} E_c \mathbf{curl}_{\bar{\boldsymbol{x}}} \left(\bar{\mu}^{-1} \mathbf{curl}_{\bar{\boldsymbol{x}}} \bar{\boldsymbol{e}} \right) = -\frac{\mu_c J_c}{T_c} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{\boldsymbol{j}}_s. \quad (3)$$

On peut définir la vitesse de propagation $v_c = 1/\sqrt{(\mu_c \epsilon_c)}$, la fréquence $f_c = 1/T_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ avec ω_c la pulsation angulaire. La longueur d'onde : $\lambda_c = v_c/f_c = (2\pi v_c)/\omega_c$ et l'épaisseur de peau : $\delta_c = \sqrt{2/(\sigma_c \omega_c \mu_c}$.

Hypothèse de base : séparation d'échelles

Analyse adimensionnelle et séparation d'échelle.

L'équation (1) devient:

$$\frac{\mu_c \epsilon_c}{T_c^2} E_c \left(\bar{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2} \bar{\mathbf{e}} \right) + \frac{\mu_c \sigma_c}{T_c} E_c \left(\bar{\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{\mathbf{e}} \right) + \frac{1}{L_c^2} E_c \mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}} \left(\bar{\mu}^{-1} \mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{e}} \right) = -\frac{\mu_c J_c}{T_c} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \bar{\mathbf{j}}_s. \quad (3)$$

On peut définir la vitesse de propagation $v_c = 1/\sqrt{(\mu_c \epsilon_c)}$, la fréquence $f_c = 1/T_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ avec ω_c la pulsation angulaire. La longueur d'onde : $\lambda_c = v_c/f_c = (2\pi v_c)/\omega_c$ et l'épaisseur de peau : $\delta_c = \sqrt{2/(\sigma_c \omega_c \mu_c}$.

L'équation (3) devient:

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_c^2} \left(\bar{\epsilon} \partial^2_{\bar{t}\bar{t}} \bar{\mathbf{e}} \right) + \frac{1}{\pi \delta_c^2} \left(\bar{\sigma} \partial_{\bar{t}} \bar{\mathbf{e}} \right) + \frac{1}{L_c^2} \mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}} \left(\bar{\mu}^{-1} \mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\mathbf{e}} \right) = -\frac{\mu_c J_c}{T_c E_c} \partial_{\bar{t}} \bar{\mathbf{j}}_s.} \quad (4)$$

Hypothèse de base : séparation d'échelles

Analyse adimensionnelle et séparation d'échelle.

Il y a séparation d'échelle si $L_m \ll \delta_c$ et $L_m \ll \lambda_c$.

$$\frac{1}{\lambda_c^2}\left(\bar{\epsilon}\partial^2_{\bar{t}\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{\pi\,\delta_c^2}\left(\bar{\sigma}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{L_c^2}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\left(\bar{\mu}^{-1}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\,\bar{\mathbf{e}}\right) = -\frac{\mu_c J_c}{T_c E_c}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{j}}_s.$$

Hypothèse de base : séparation d'échelles

Analyse adimensionnelle et séparation d'échelle.

Il y a séparation d'échelle si $L_m \ll \delta_c$ et $L_m \ll \lambda_c$.

$$\frac{1}{\lambda_c^2}\left(\bar{\epsilon}\partial^2_{\bar{t}\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{\pi\,\delta_c^2}\left(\bar{\sigma}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{L_c^2}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\left(\bar{\mu}^{-1}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\,\bar{\mathbf{e}}\right) = -\frac{\mu_c J_c}{T_c E_c}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{j}}_s.$$

Il n'y a plus séparation d'échelle si au niveau méso :

On a les courants induits $\delta_c \approx L_m$.

$$\frac{1}{\lambda_c^2}\left(\bar{\epsilon}\partial^2_{\bar{t}\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{\pi\,\delta_c^2}\left(\bar{\sigma}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{L_c^2}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\left(\bar{\mu}^{-1}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\,\bar{\mathbf{e}}\right) = -\frac{\mu_c J_c}{T_c E_c}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{j}}_s.$$

Hypothèse de base : séparation d'échelles

Analyse adimensionnelle et séparation d'échelle.

Il y a séparation d'échelle si $L_m \ll \delta_c$ et $L_m \ll \lambda_c$.

$$\frac{1}{\lambda_c^2}\left(\bar{\epsilon}\partial^2_{\bar{t}\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{\pi\,\delta_c^2}\left(\bar{\sigma}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{L_c^2}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\left(\bar{\mu}^{-1}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\,\bar{\mathbf{e}}\right) = -\frac{\mu_c J_c}{T_c E_c}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{j}}_s.$$

Il n'y a plus séparation d'échelle si au niveau méso :

On a les courants induits $\delta_c \approx L_m$.

On a la propagation $\lambda_c \approx L_m$ (p.ex. pour les métamatériaux).

$$\frac{1}{\lambda_c^2}\left(\bar{\epsilon}\partial^2_{\bar{t}\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{\pi\,\delta_c^2}\left(\bar{\sigma}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{L_c^2}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\left(\bar{\mu}^{-1}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\,\bar{\mathbf{e}}\right) = -\frac{\mu_c J_c}{T_c E_c}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{j}}_s.$$

Hypothèse de base : séparation d'échelles

Analyse adimensionnelle et séparation d'échelle.

Il y a séparation d'échelle si $L_m \ll \delta_c$ et $L_m \ll \lambda_c$.

$$\frac{1}{\lambda_c^2}\left(\bar{\epsilon}\partial^2_{\bar{t}\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{\pi\,\delta_c^2}\left(\bar{\sigma}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{L_c^2}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\left(\bar{\mu}^{-1}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\,\bar{\mathbf{e}}\right) = -\frac{\mu_c J_c}{T_c E_c}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{j}}_s.$$

Il n'y a plus séparation d'échelle si au niveau méso :

On a les courants induits $\delta_c \approx L_m$.

On a la propagation $\lambda_c \approx L_m$ (p.ex. pour les métamatériaux).

Ou les deux.

$$\frac{1}{\lambda_c^2}\left(\bar{\epsilon}\partial^2_{\bar{t}\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{\pi\,\delta_c^2}\left(\bar{\sigma}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{e}}\right) + \frac{1}{L_c^2}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\left(\bar{\mu}^{-1}\mathbf{curl}_{\bar{\mathbf{x}}}\,\bar{\mathbf{e}}\right) = -\frac{\mu_c J_c}{T_c E_c}\partial_{\bar{t}}\bar{\mathbf{j}}_s.$$

Hypothèse de base : séparation d'échelles

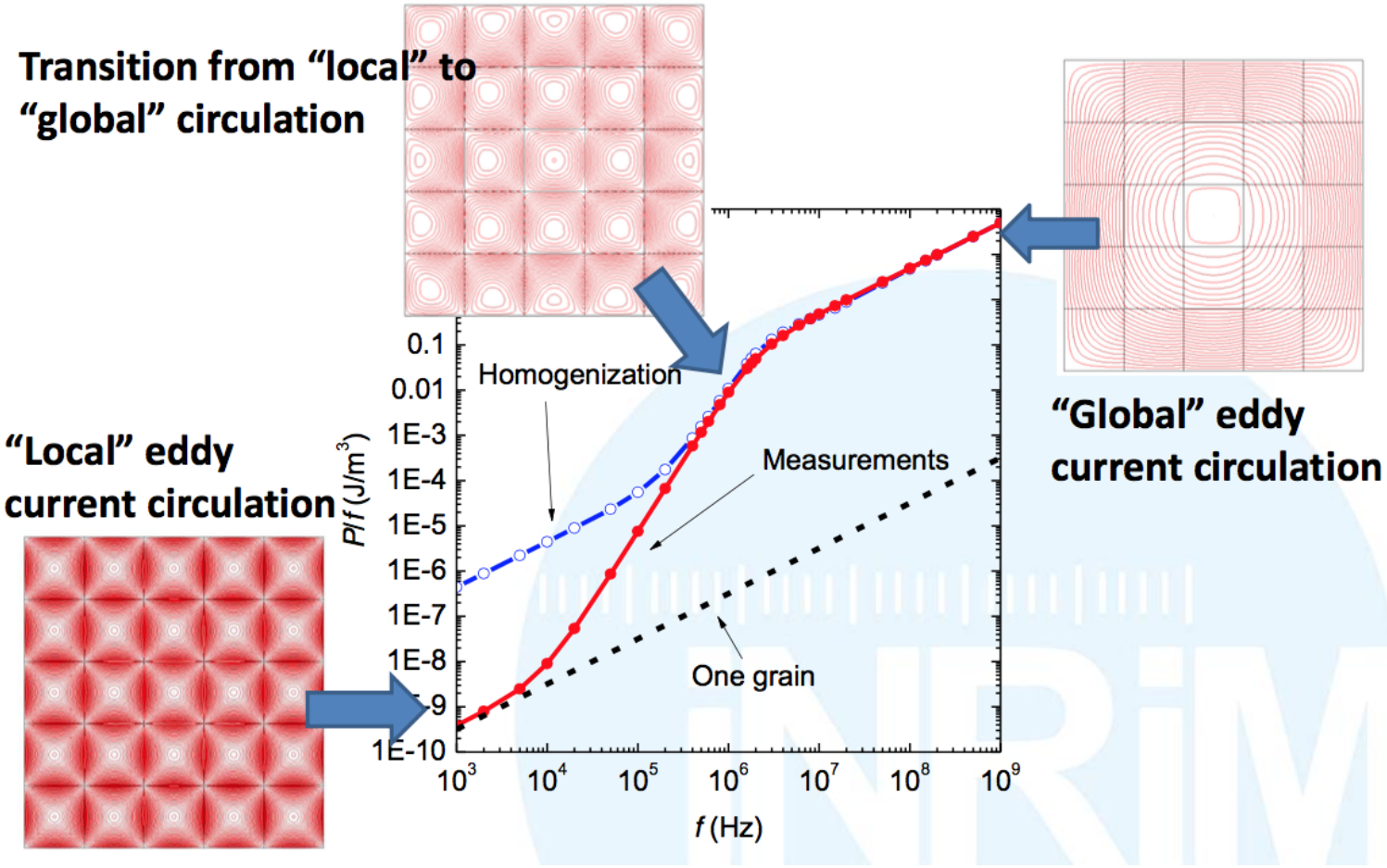


Figure: Transition des courants locaux aux courants globaux dans les ferrites doux (Bottauscio et al., 2013)

Choix de la méthode multi-échelle

- Plusieurs méthodes multi-échelles peuvent être utilisées: **homogénéisation en champs moyen, les méthodes upscaling, Homogénéisation basée sur la methode FFT**...

Choix de la méthode multi-échelle

- Plusieurs méthodes multi-échelles peuvent être utilisées: **homogénéisation en champs moyen, les méthodes upscaling, Homogénéisation basée sur la methode FFT**...
- 1997: **Multiscale finite element method (MsFEM)** (Hou - Efendiev) : utilise des fonctions de base (FB) multi-échelles qui contiennent des informations sur les hétérogénéités de la microstructure.

Choix de la méthode multi-échelle

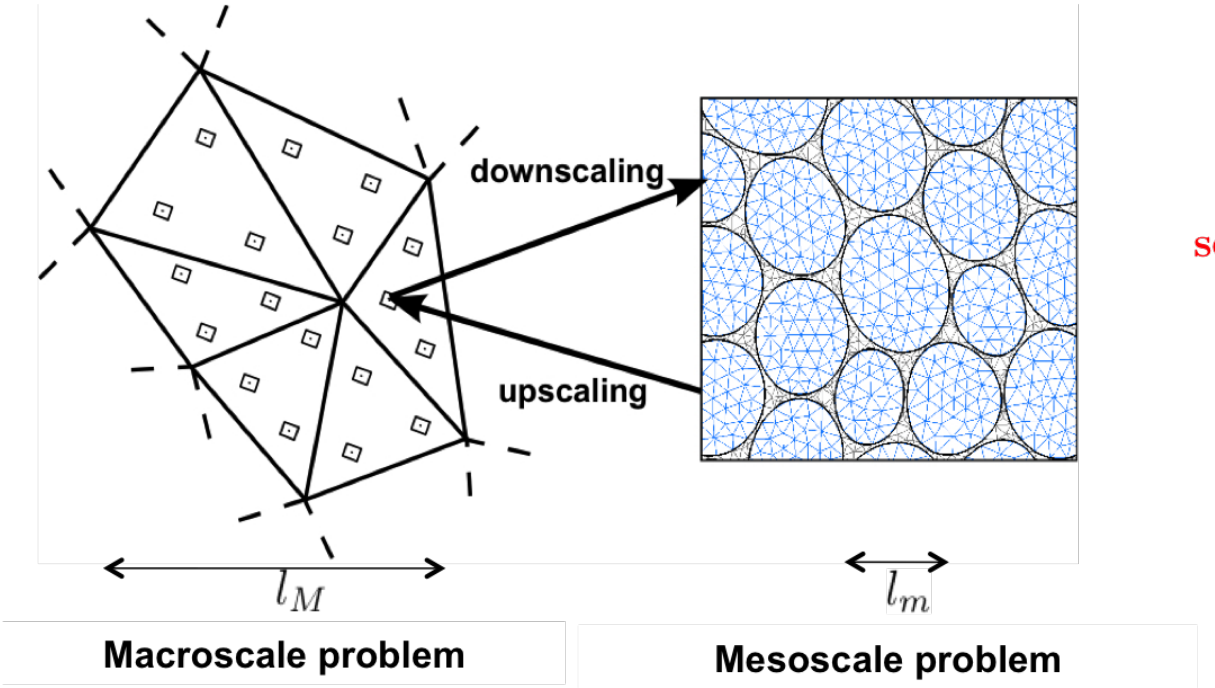
- Plusieurs méthodes multi-échelles peuvent être utilisées: **homogénéisation en champs moyen, les méthodes upscaling, Homogénéisation basée sur la methode FFT**...
- 1997: **Multiscale finite element method (MsFEM)** (Hou - Efendiev) : utilise des fonctions de base (FB) multi-échelles qui contiennent des informations sur les hétérogénéités de la microstructure.
- 1998: **Variational Multiscale Method (VMS) / Local Orthogonal Decomposition (LOD)** (Hughes/Peterseim).

Choix de la méthode multi-échelle

- Plusieurs méthodes multi-échelles peuvent être utilisées: **homogénéisation en champs moyen, les méthodes upscaling, Homogénéisation basée sur la methode FFT**...
- 1997: **Multiscale finite element method (MsFEM)** (Hou - Efendiev) : utilise des fonctions de base (FB) multi-échelles qui contiennent des informations sur les hétérogénéités de la microstructure.
- 1998: **Variational Multiscale Method (VMS) / Local Orthogonal Decomposition (LOD)** (Hughes/Peterseim).
- 2003: **Heterogeneous multiscale method (HMM)** (E) : La philosophie de HMM est de résoudre le modèle macro incomplet en extrayant les données nécessaires du modèle méso. les deux modèles sont couplés.

La méthodé HMM/FE^2

La méthode HMM/FE^2



scale separation

$l_m \ll l_M$

1 Méthodes multi-échelles

2 Formulation *h*-conforme
- Problème de référence
- Formulations multi-échelles

3 Applications numériques
- Empilement de tôles 2D
- Empilement de tôles 3D

4 Conclusion et Perspectives

1. Méthodes multi-échelles
2. Formulation *h*-conforme
   - Problème de référence
   - Formulations multi-échelles
3. Applications numériques
   - Empilement de tôles 2D
   - Empilement de tôles 3D
4. Conclusion et Perspectives

Forme faible du problème de référence

Considérons la forme faible $\boldsymbol{h}$-conforme suivante du problème de référence: pour presque tout $t \in]0, T[$, trouvez $\boldsymbol{h}^{\varepsilon} \in \boldsymbol{V}$ t.q. pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0$:

Forme faible du problème de référence

Considérons la forme faible $\boldsymbol{h}$-conforme suivante du problème de référence: pour presque tout $t \in]0, T[$, trouvez $\boldsymbol{h}^\varepsilon \in \boldsymbol{V}$ t.q. pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0$:

Problème linéaire

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu^\varepsilon \boldsymbol{h}^\varepsilon\right), \boldsymbol{v}\right)_\Omega + \left(\rho^\varepsilon \,\mathbf{curl}\, \boldsymbol{h}^\varepsilon, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}\right)_{\Omega_c} + \sum_{i \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_i V_i = 0.$$

Forme faible du problème de référence

Considérons la forme faible $\boldsymbol{h}$-conforme suivante du problème de référence: pour presque tout $t \in]0, T[$, trouvez $\boldsymbol{h}^\varepsilon \in \boldsymbol{V}$ t.q. pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0$:

Problème linéaire

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu^\varepsilon \boldsymbol{h}^\varepsilon\right), \boldsymbol{v}\right)_\Omega + \left(\rho^\varepsilon \,\mathbf{curl}\, \boldsymbol{h}^\varepsilon, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}\right)_{\Omega_c} + \sum_{i \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_i V_i = 0.$$

Problème non-linéaire

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\mathcal{B}}\left(\boldsymbol{h}^\varepsilon\right), \boldsymbol{v}\right)_\Omega + \left(\rho^\varepsilon \,\mathbf{curl}\, \boldsymbol{h}^\varepsilon, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}\right)_{\Omega_c} + \sum_{i \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_i V_i = 0.$$

Forme faible du problème de référence

Considérons la forme faible $\boldsymbol{h}$-conforme suivante du problème de référence: pour presque tout $t \in]0, T[$, trouvez $\boldsymbol{h}^\varepsilon \in \boldsymbol{V}$ t.q. pour tout $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0$:

Problème linéaire

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu^\varepsilon \boldsymbol{h}^\varepsilon\right), \boldsymbol{v}\right)_\Omega + \left(\rho^\varepsilon \,\mathbf{curl}\, \boldsymbol{h}^\varepsilon, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}\right)_{\Omega_c} + \sum_{i \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_i V_i = 0.$$

Problème non-linéaire

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\mathcal{B}}\left(\boldsymbol{h}^\varepsilon\right), \boldsymbol{v}\right)_\Omega + \left(\rho^\varepsilon \,\mathbf{curl}\, \boldsymbol{h}^\varepsilon, \mathbf{curl}\, \boldsymbol{v}\right)_{\Omega_c} + \sum_{i \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_i V_i = 0.$$

Au niveau discrét, le champ magnétique $\boldsymbol{h}^\varepsilon$ admet la décomposition suivante:

$$\boldsymbol{h}^\varepsilon = \sum_{e \in \Omega_c} h_e \boldsymbol{S}_e + \sum_{n \in \Omega_c^C} \phi_n \mathbf{grad}\, S_n + \sum_{i \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_i \boldsymbol{c}_i.$$

1. Méthodes multi-échelles
2. Formulation *h*-conforme
   - Problème de référence
   - Formulations multi-échelles
3. Applications numériques
   - Empilement de tôles 2D
   - Empilement de tôles 3D
4. Conclusion et Perspectives

Homogénéisation du problème des courants induits

La décomposition des champs macro et méso :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_m &= \boldsymbol{b}_M + \boldsymbol{b}_c \quad , \quad \boldsymbol{h}_m = \boldsymbol{h}_M + \boldsymbol{h}_c, \\ \boldsymbol{j}_m &= \boldsymbol{j}_M + \boldsymbol{j}_c \quad , \quad \boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{e}_M + \boldsymbol{e}_c. \end{aligned}$$

Homogénéisation du problème des courants induits

La décomposition des champs macro et méso :

$$\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{b}_M + \boldsymbol{b}_c \quad , \quad \boldsymbol{h}_m = \boldsymbol{h}_M + \boldsymbol{h}_c,$$
$$\boldsymbol{j}_m = \boldsymbol{j}_M + \boldsymbol{j}_c \quad , \quad \boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{e}_M + \boldsymbol{e}_c.$$

Les équations macro :

$$\mathbf{curl}_x\, \boldsymbol{h}_M = \boldsymbol{j}_M,$$
$$\mathbf{curl}_x\, \boldsymbol{e}_M = -\partial_t \boldsymbol{b}_M.$$

Les équations méso :

$$\mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{j}_m = \boldsymbol{j}_m,$$
$$\mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{e}_m = -\partial_t \boldsymbol{b}_m.$$

Homogénéisation du problème des courants induits

La décomposition des champs macro et méso :

$$\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{b}_M + \boldsymbol{b}_c \quad , \quad \boldsymbol{h}_m = \boldsymbol{h}_M + \boldsymbol{h}_c,$$
$$\boldsymbol{j}_m = \boldsymbol{j}_M + \boldsymbol{j}_c \quad , \quad \boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{e}_M + \boldsymbol{e}_c.$$

Les équations macro :

$$\mathbf{curl}_x\, \boldsymbol{h}_M = \boldsymbol{j}_M,$$
$$\mathbf{curl}_x\, \boldsymbol{e}_M = -\partial_t \boldsymbol{b}_M.$$

Les équations méso :

$$\mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{j}_m = \boldsymbol{j}_m,$$
$$\mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{e}_m = -\partial_t \boldsymbol{b}_m.$$

Upscaling :

$$\boldsymbol{b}_M = \frac{1}{|\Omega_m|}\int_{\Omega_m} \boldsymbol{b}_m \mathrm{d}V \quad , \quad \boldsymbol{h}_M = \frac{1}{|\,\partial\Omega_m|}\int_{\partial\Omega_m} \boldsymbol{h}_m \mathrm{d}S,$$
$$\boldsymbol{j}_M = \frac{1}{|\Omega_m|}\int_{\Omega_m} \boldsymbol{j}_m \mathrm{d}V \quad , \quad \boldsymbol{e}_M = \frac{1}{|\,\partial\Omega_m|}\int_{\partial\Omega_m} \boldsymbol{e}_m \mathrm{d}S.$$

Forme faible du problème multi-échelle

La forme faible : trouvez $\left(\boldsymbol{h}_M, [\boldsymbol{h}_c]\right) \in \boldsymbol{V}^M(\Omega_M) \times (\boldsymbol{V}^c_{\mathrm{per}}(\Omega_m))^{\mathrm{N}_{GP}}$ t.q.
$\forall \left(\boldsymbol{v}_M, [\boldsymbol{v}_c]\right) \in \boldsymbol{V}^M_0(\Omega_M) \times (\boldsymbol{V}^c_{\mathrm{per}}(\Omega_m))^{\mathrm{N}_{GP}}$ et $k = 1, 2, \cdots, \mathrm{N}_{GP}$.

$$\left(\partial_t \boldsymbol{\mathcal{B}}_M(\boldsymbol{h}_M, [\boldsymbol{h}_c]), \boldsymbol{v}_M\right)_\Omega + \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_M(\boldsymbol{j}_M, [\mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{h}_c]), \mathbf{curl}_x\, \boldsymbol{v}_M\right)_{\Omega_c} + \sum_{i \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_i V_i = 0,$$

$$\left(\partial_t \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{h}_M + \boldsymbol{h}_c^{(k)}), \boldsymbol{v}_c\right)_{\Omega_m} + \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{j}_M + \mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{h}_c^{(k)}), \mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{v}_c\right)_{\Omega_{mc}} = 0.$$

Forme faible du problème multi-échelle

La forme faible : trouvez $\left(\boldsymbol{h}_M, [\boldsymbol{h}_c]\right) \in \boldsymbol{V}^M(\Omega_M) \times (\boldsymbol{V}^c_{\mathrm{per}}(\Omega_m))^{\mathrm{N}_{GP}}$ t.q.
$\forall \left(\boldsymbol{v}_M, [\boldsymbol{v}_c]\right) \in \boldsymbol{V}^M_0(\Omega_M) \times (\boldsymbol{V}^c_{\mathrm{per}}(\Omega_m))^{\mathrm{N}_{GP}}$ et $k = 1, 2, \cdots, \mathrm{N}_{GP}$.

$$\left(\partial_t \boldsymbol{\mathcal{B}}_M(\boldsymbol{h}_M, [\boldsymbol{h}_c]), \boldsymbol{v}_M\right)_\Omega + \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_M(\boldsymbol{j}_M, [\mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{h}_c]), \mathbf{curl}_x\, \boldsymbol{v}_M\right)_{\Omega_c} + \sum_{i \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_i V_i = 0,$$

$$\left(\partial_t \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{h}_M + \boldsymbol{h}_c^{(k)}), \boldsymbol{v}_c\right)_{\Omega_m} + \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{j}_M + \mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{h}_c^{(k)}), \mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{v}_c\right)_{\Omega_{mc}} = 0.$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_M(\boldsymbol{h}_M, \boldsymbol{h}_c^k) = \frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{h}_M + \boldsymbol{h}_c^{(k)}) \mathrm{d}V,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_M(\boldsymbol{j}_M, \mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{h}_c^{(k)}) = \frac{1}{|\partial\Omega_m|} \int_{\partial\Omega_m} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{j}_M + \mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{h}_c^{(k)}) \mathrm{d}V.$$

Forme faible du problème multi-échelle

La forme faible : trouvez $\left(\boldsymbol{h}_M, [\boldsymbol{h}_c]\right) \in \boldsymbol{V}^M(\Omega_M) \times (\boldsymbol{V}^c_{\mathrm{per}}(\Omega_m))^{\mathrm{N}_{GP}}$ t.q.
$\forall \left(\boldsymbol{v}_M, [\boldsymbol{v}_c]\right) \in \boldsymbol{V}^M_0(\Omega_M) \times (\boldsymbol{V}^c_{\mathrm{per}}(\Omega_m))^{\mathrm{N}_{GP}}$ et $k = 1, 2, \cdots, \mathrm{N}_{GP}$.

$$\left(\partial_t \boldsymbol{\mathcal{B}}_M(\boldsymbol{h}_M, [\boldsymbol{h}_c]), \boldsymbol{v}_M\right)_\Omega + \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}_M(\boldsymbol{j}_M, [\mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{h}_c]), \mathbf{curl}_x\, \boldsymbol{v}_M\right)_{\Omega_c} + \sum_{i \in \mathcal{C}} \mathcal{I}_i V_i = 0,$$

$$\left(\partial_t \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{h}_M + \boldsymbol{h}_c^{(k)}), \boldsymbol{v}_c\right)_{\Omega_m} + \left(\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{j}_M + \mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{h}_c^{(k)}), \mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{v}_c\right)_{\Omega_{mc}} = 0.$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}_M(\boldsymbol{h}_M, \boldsymbol{h}_c^k) = \frac{1}{|\Omega_m|} \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{h}_M + \boldsymbol{h}_c^{(k)}) \mathrm{d}V,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_M(\boldsymbol{j}_M, \mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{h}_c^{(k)}) = \frac{1}{|\partial\Omega_m|} \int_{\partial\Omega_m} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{j}_M + \mathbf{curl}_y\, \boldsymbol{h}_c^{(k)}) \mathrm{d}V.$$

$\dfrac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}_M}{\partial \boldsymbol{h}_M}$ et $\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_M}{\partial \boldsymbol{J}_M}$ sont calculés par différences finies.

1 Méthodes multi-échelles

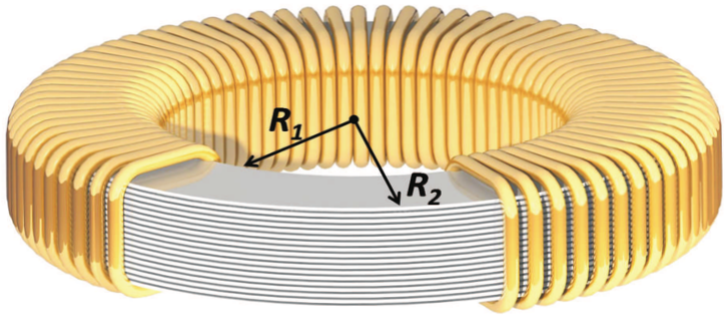
2 Formulation h-conforme
- Problème de référence
- Formulations multi-échelles

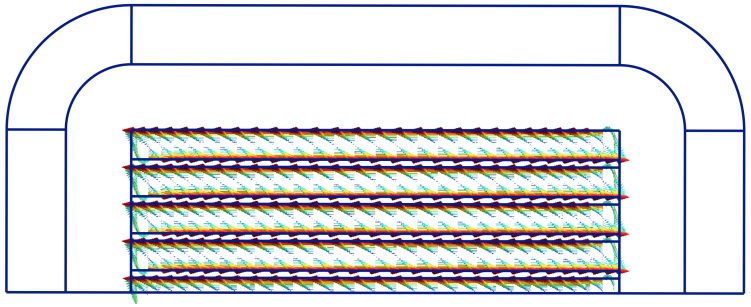
3 Applications numériques
- Empilement de tôles 2D
- Empilement de tôles 3D

4 Conclusion et Perspectives

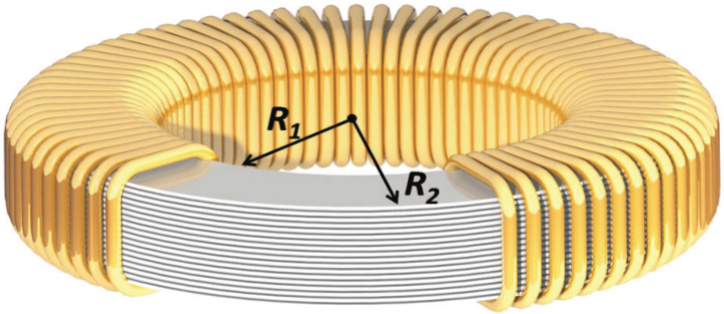
1. Méthodes multi-échelles
2. Formulation ***h***-conforme
   - Problème de référence
   - Formulations multi-échelles
3. Applications numériques
   - Empilement de tôles 2D
   - Empilement de tôles 3D
4. Conclusion et Perspectives

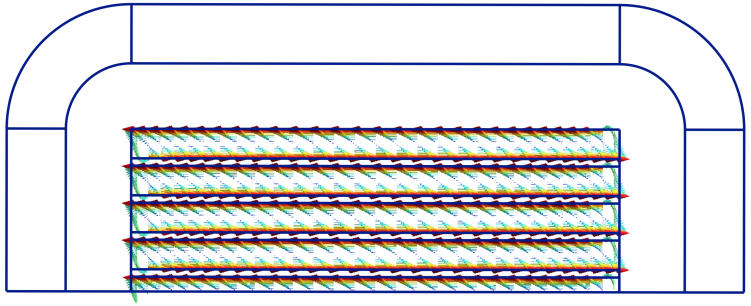
Géometrie et loi de matériaux





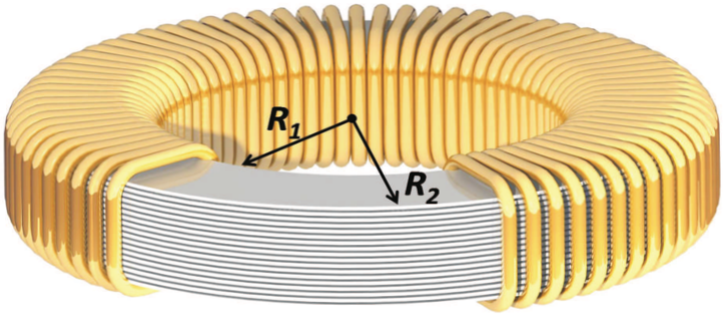
Géometrie et loi de matériaux

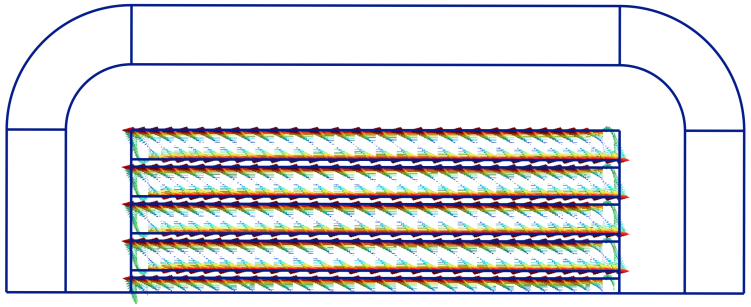




Description de la géometrie:
10.5 tôles (15mm $\times$ 0.9mm) + 10 couches isolantes (15mm $\times$ 0.1mm).

Géometrie et loi de matériaux





Description de la géometrie:
10.5 tôles (15mm $\times$ 0.9mm) + 10 couches isolantes (15mm $\times$ 0.1mm).

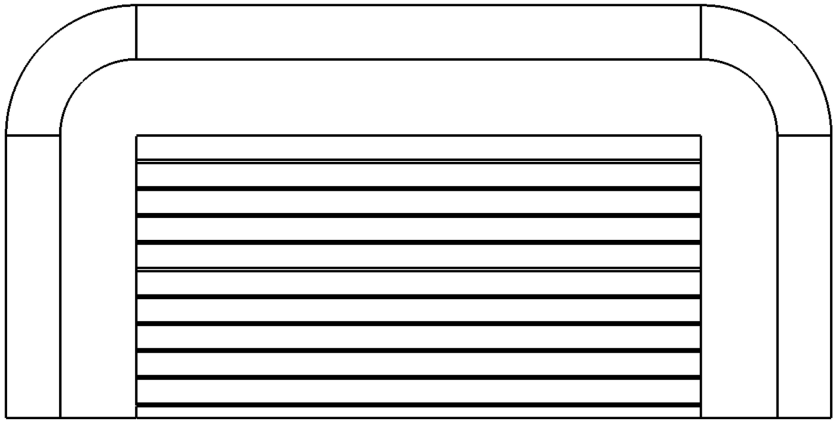
Loix de matériaux:

a. Tôle: $\sigma_{\mathrm{Fe}} = 5 \times 10^7$ S.
Matériau magnétique : loi nonlinéaire de type (Fröhlich-Kennelly)
$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{h}) = \left(\mu_0 + \frac{\alpha}{\beta+\gamma|\boldsymbol{h}|}\right) \boldsymbol{h}$.

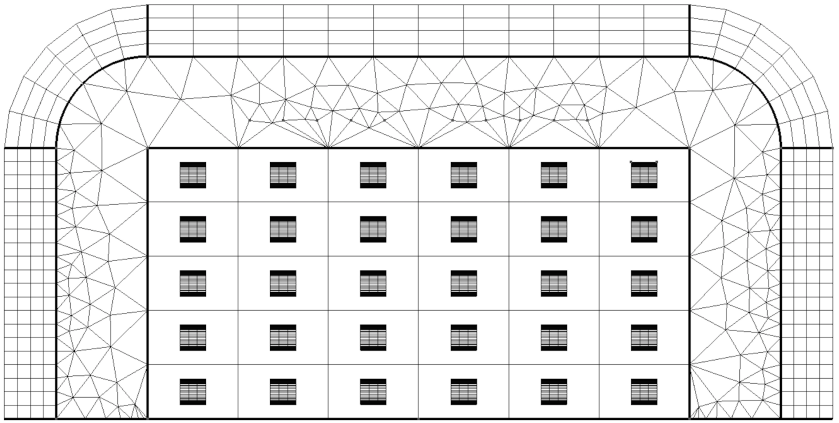
b. Isolant et air environnant: $\mu_r = 1$.

Les géométries et les maillages

Géometrie de référence

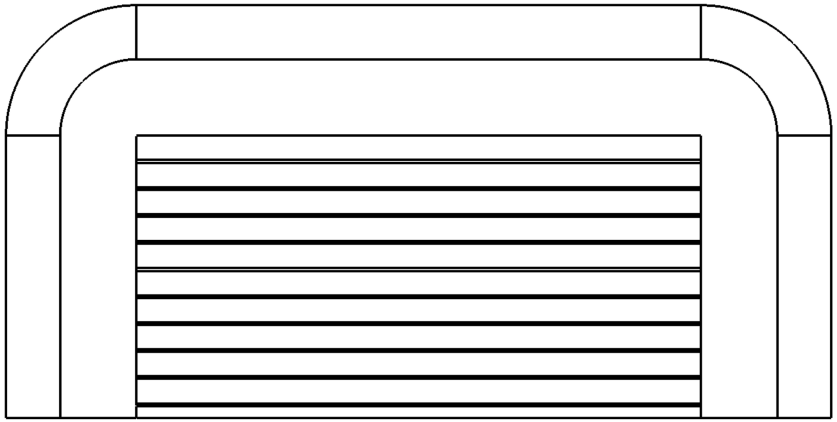


Géometrie macro et maillage

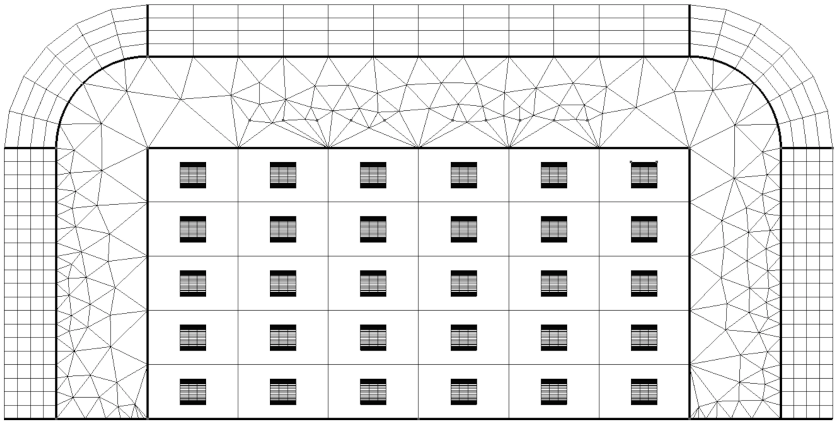


Les géométries et les maillages

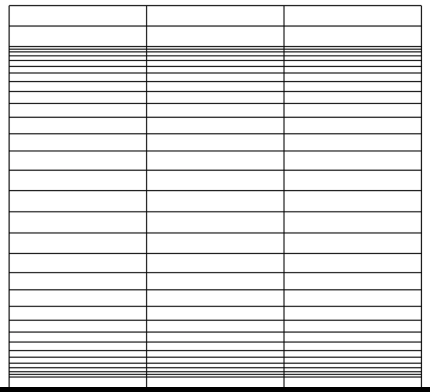
Géometrie de référence



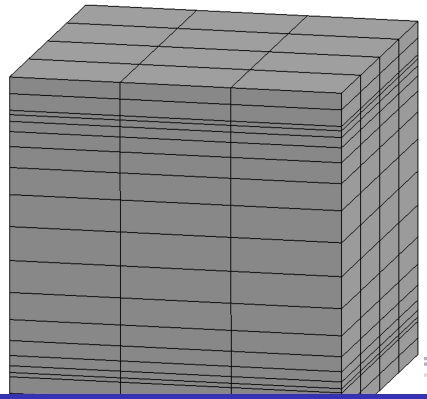
Géometrie macro et maillage



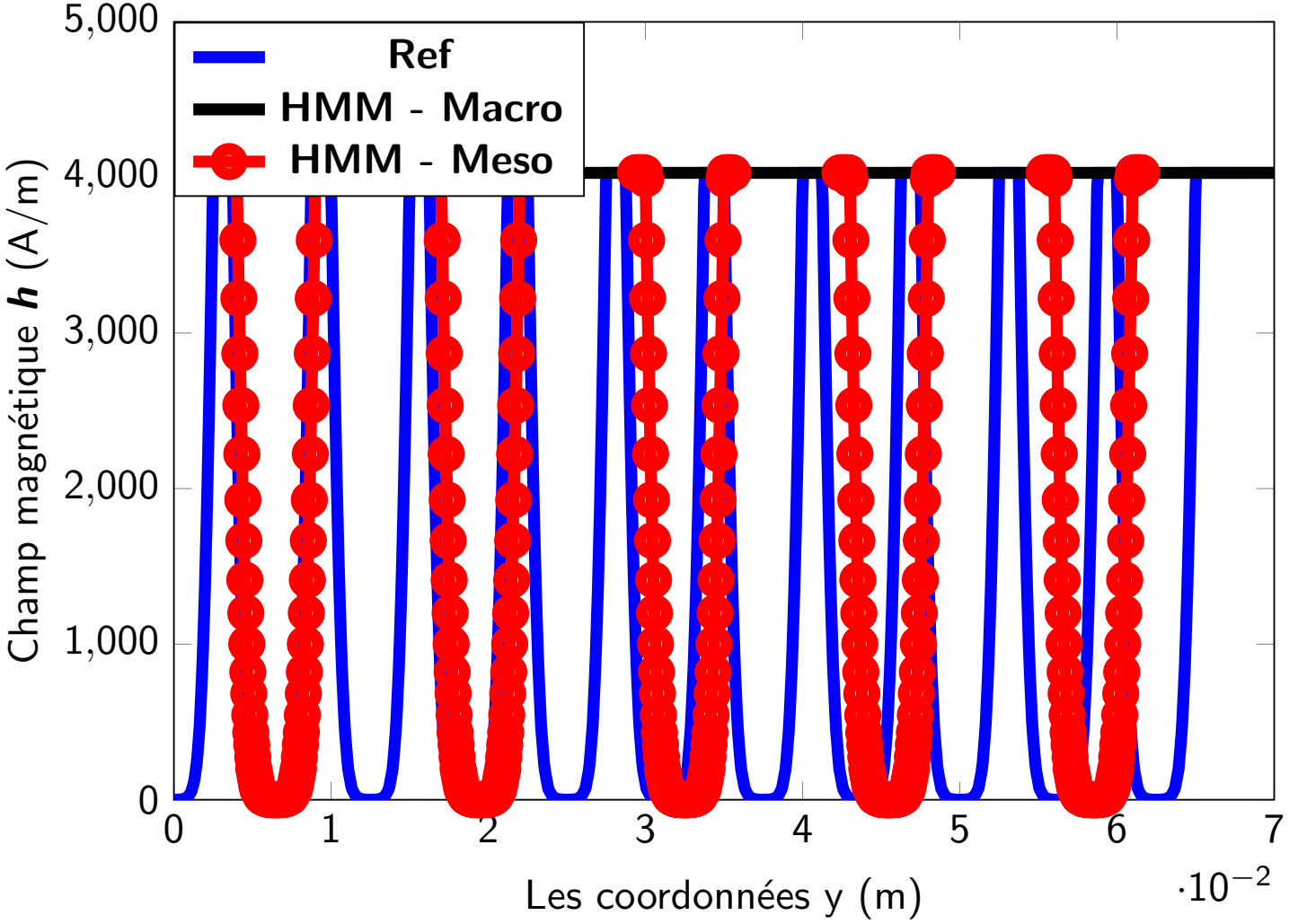
Maillage méso 2D



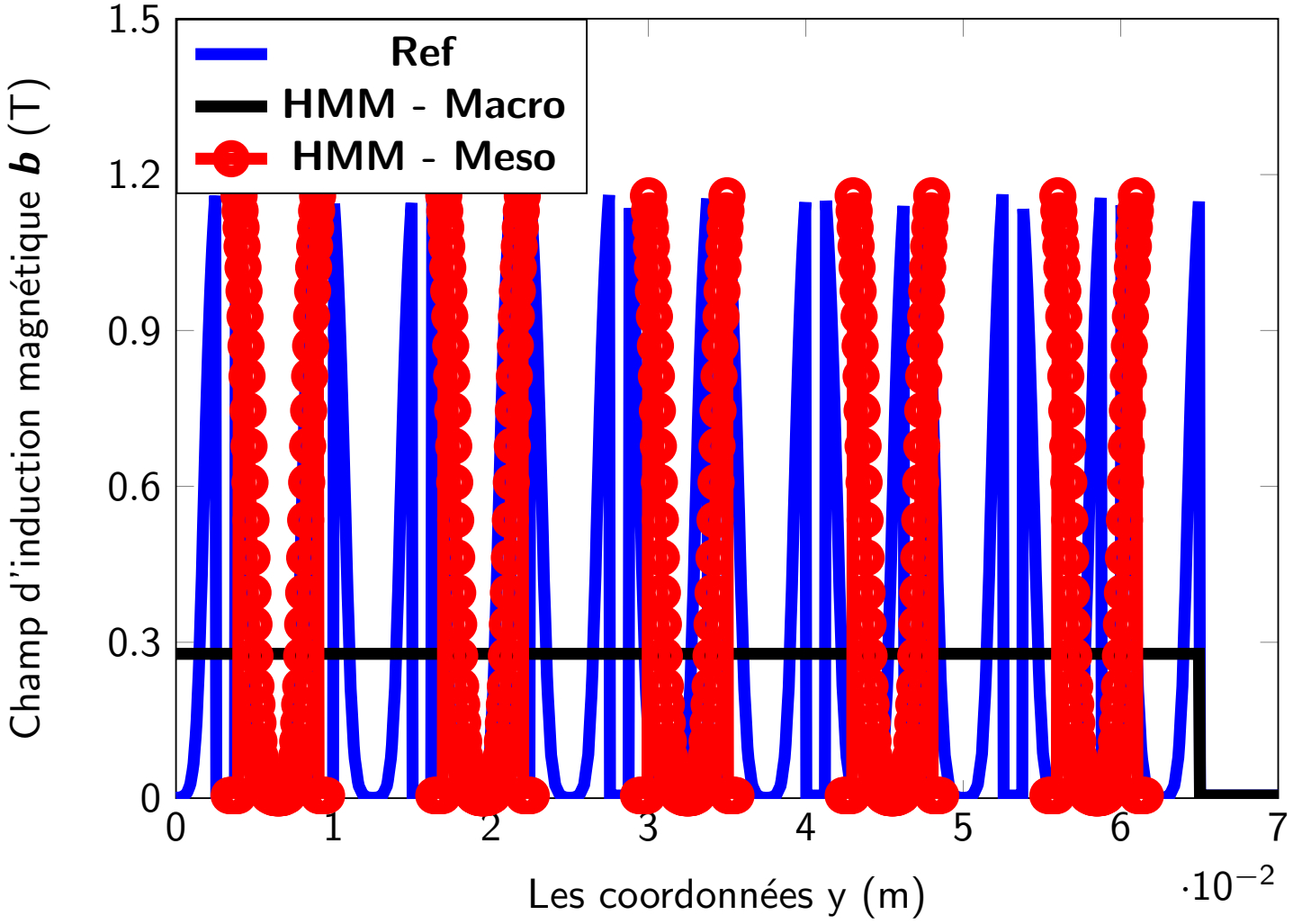
Maillage méso 3D



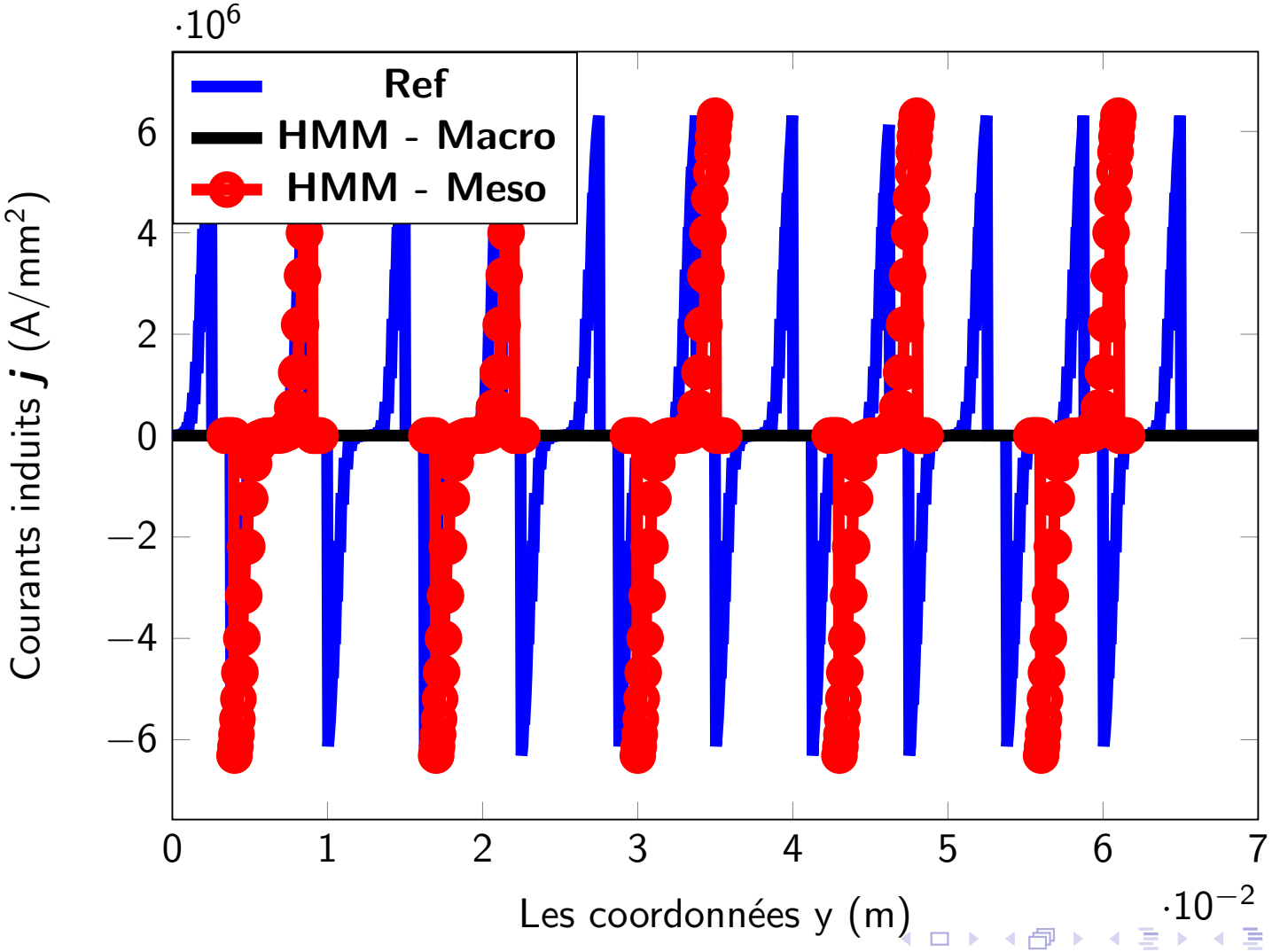
Précision : champ magnétique local $\boldsymbol{h}$



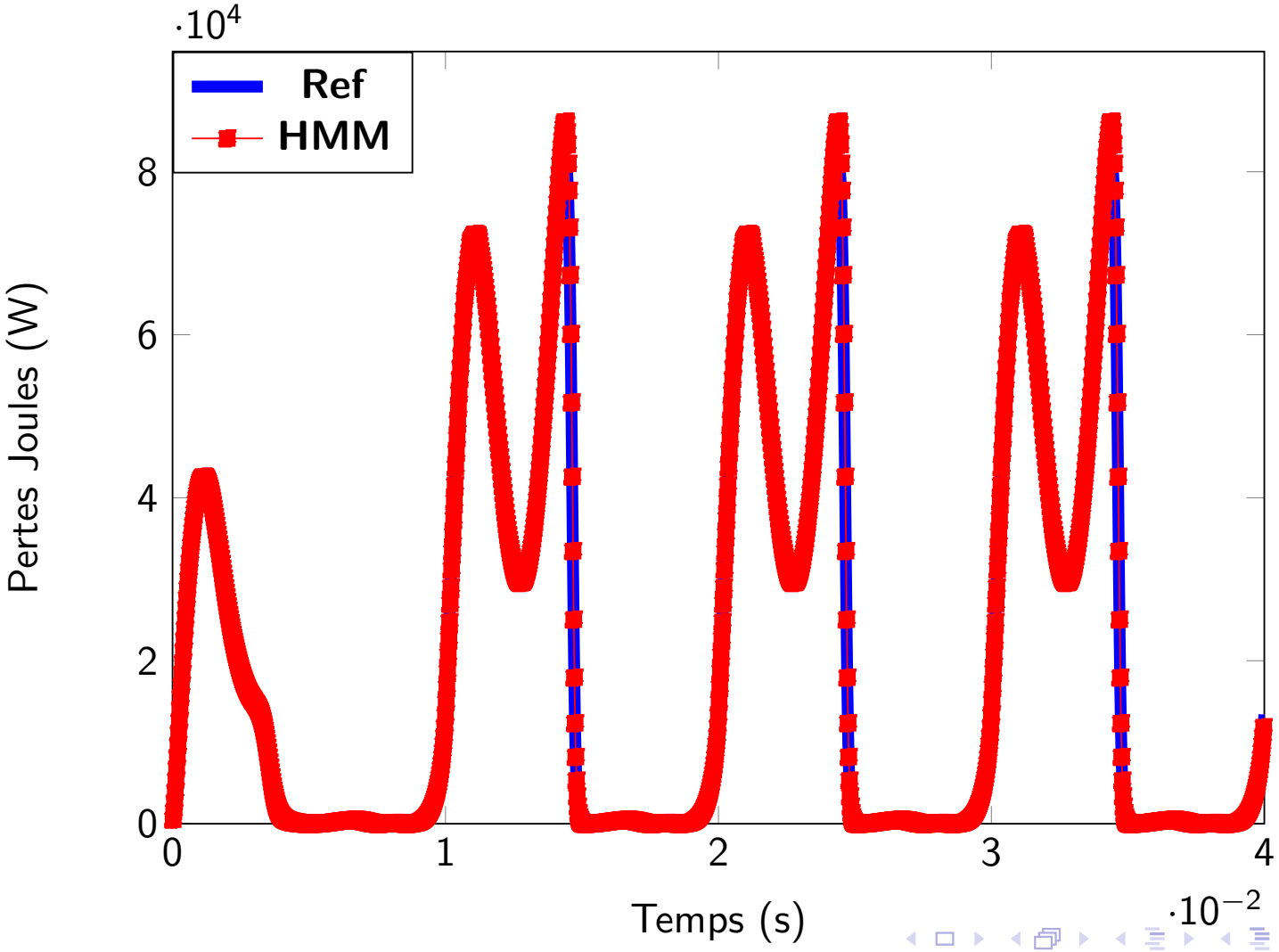
Précision : champ d'induction magnétique $\boldsymbol{b}$



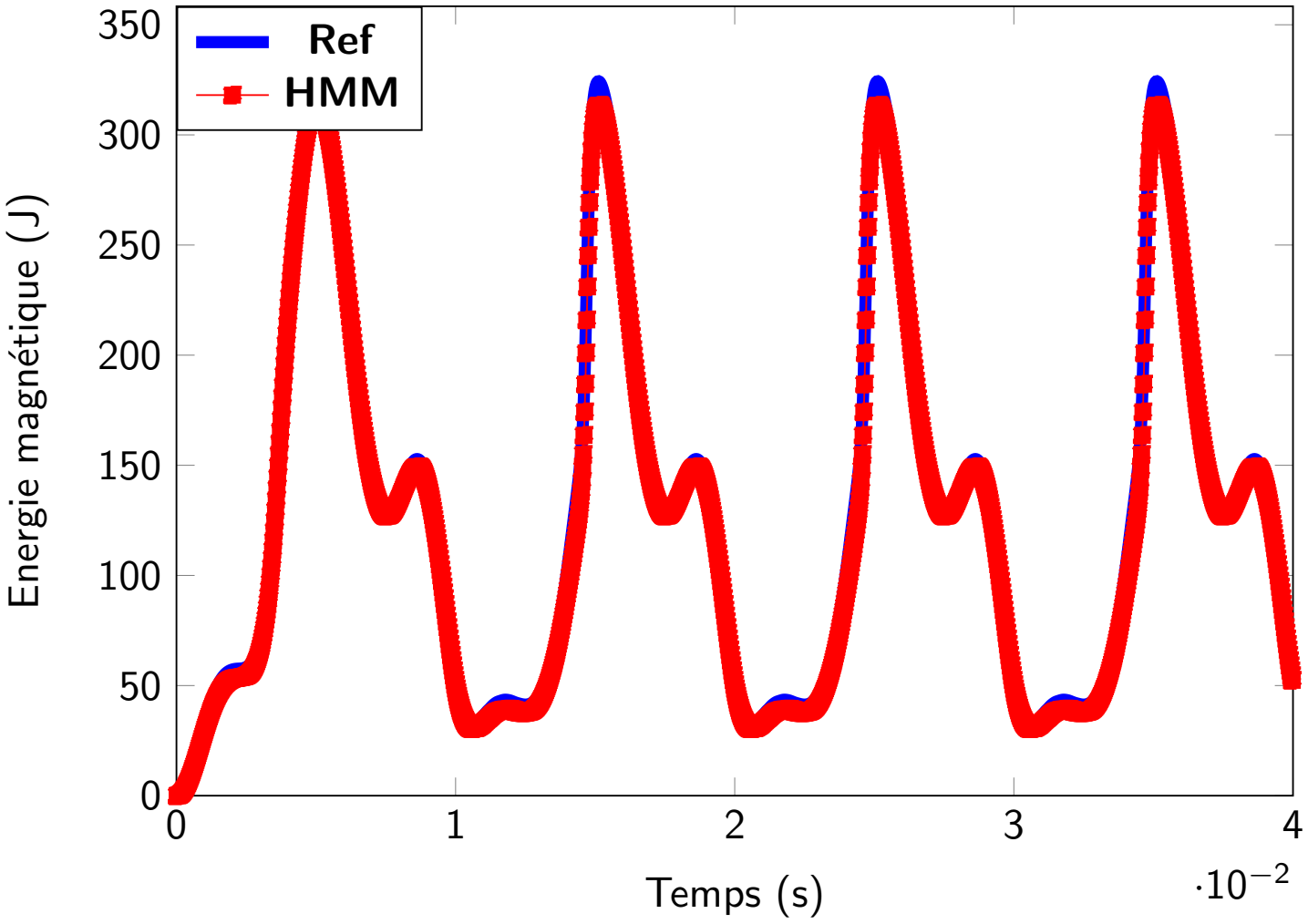
Précision : courants induits locaux $\boldsymbol{j}$



Précision : pertes par courants induits $\int_{\Omega_c} \rho \, |\boldsymbol{j}|^2$

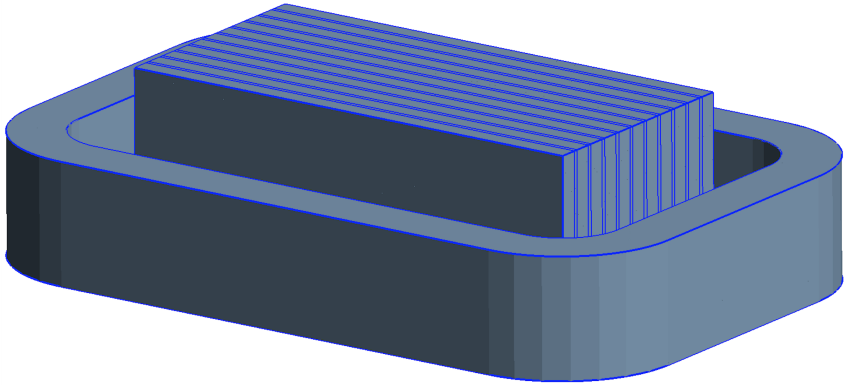


Précision : énergie magnétique $\int_\Omega \mu \left|\boldsymbol{h}\right|^2$

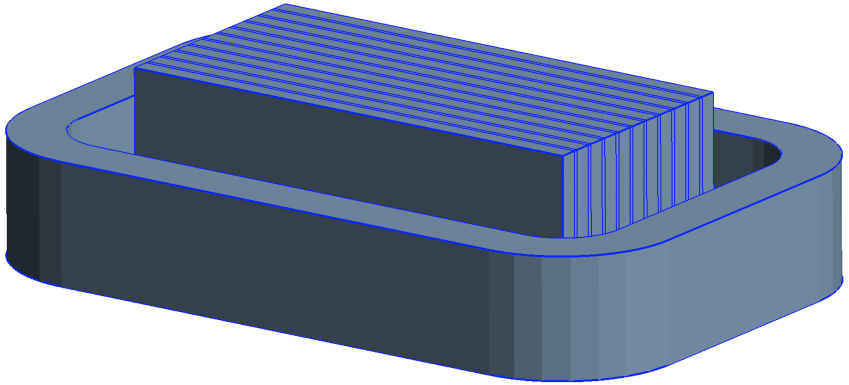


1. Méthodes multi-échelles
2. Formulation ***h***-conforme
   - Problème de référence
   - Formulations multi-échelles
3. Applications numériques
   - Empilement de tôles 2D
   - Empilement de tôles 3D
4. Conclusion et Perspectives

Géometrie et lois de matériaux

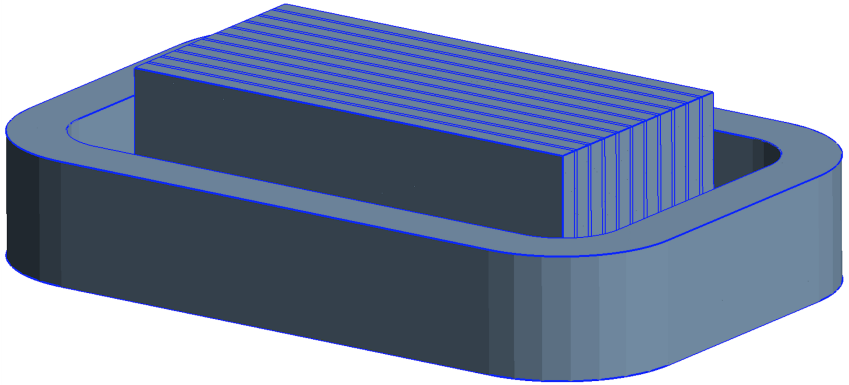


Géometrie et lois de matériaux



Description de la géometrie:
11 tôles (15mm $\times$ 0.9mm) + 10 isolants (15mm $\times$ 0.1mm).

Géometrie et lois de matériaux



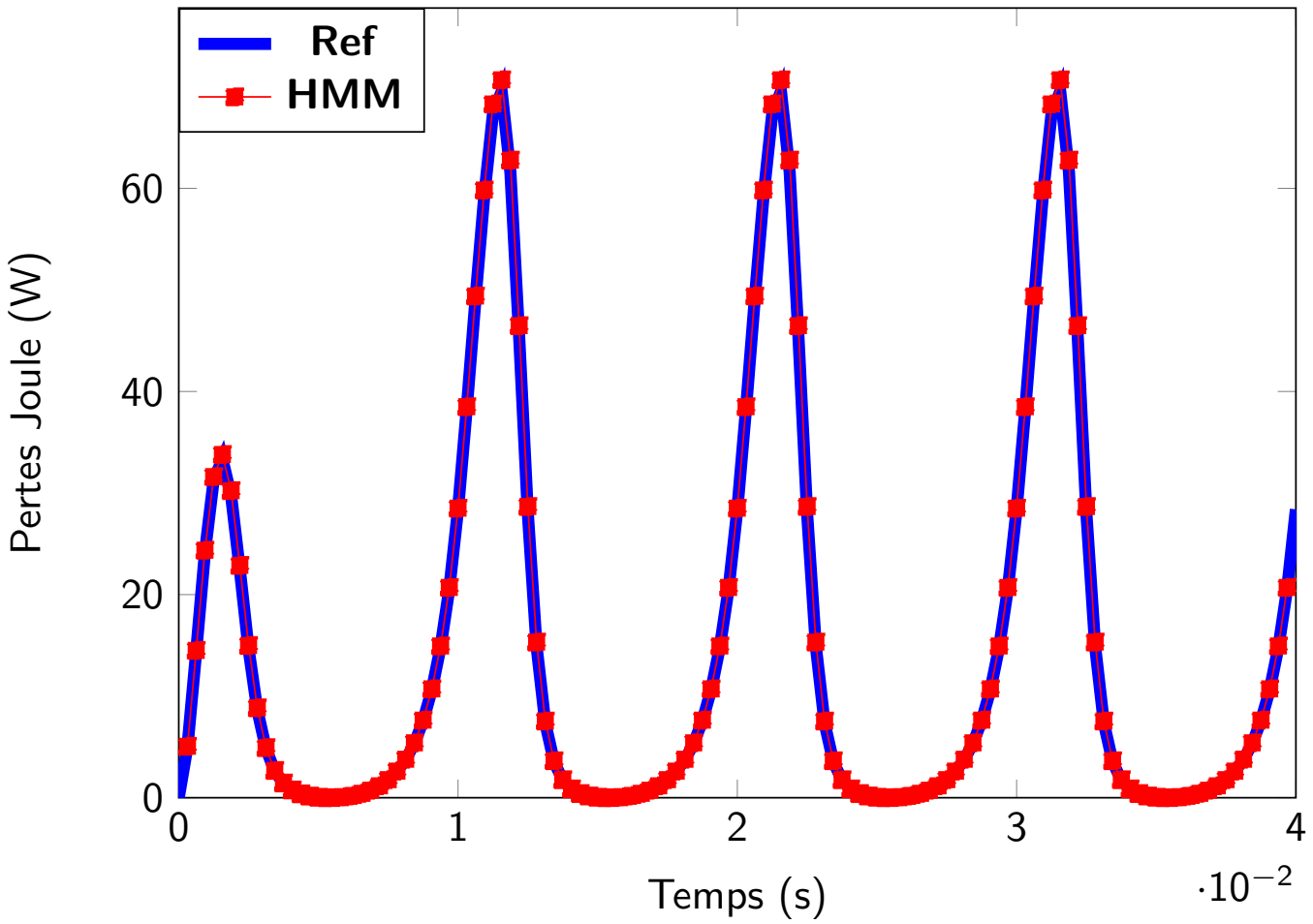
Description de la géometrie:
11 tôles (15mm $\times$ 0.9mm) + 10 isolants (15mm $\times$ 0.1mm).

Lois de matériaux:

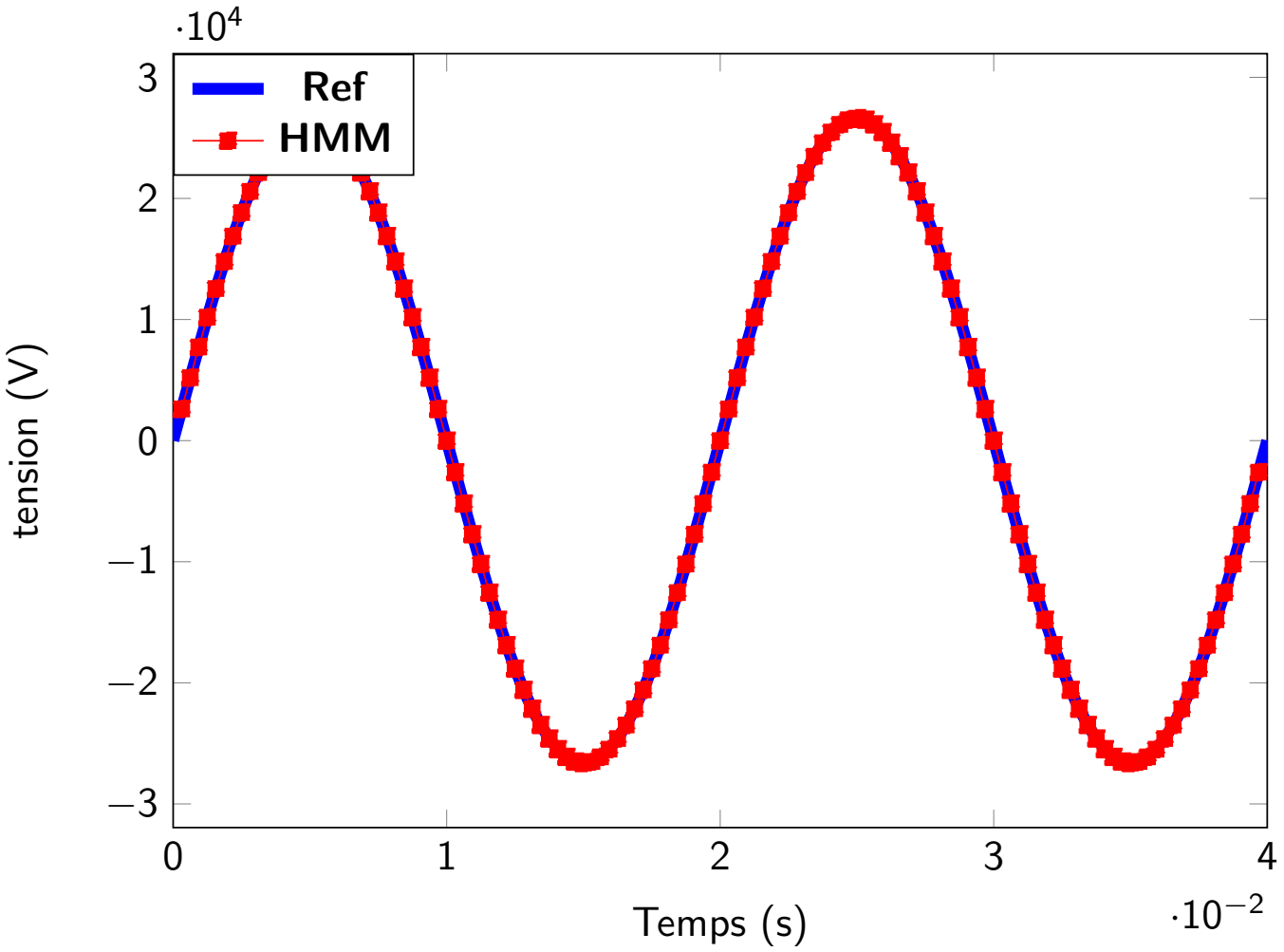
a. Tôles: $\sigma_{\mathrm{Fe}} = 5 \times 10^7$ S.
Matériaux magnétiques : loi nonlinéaire de type (Fröhlich-Kennelly)
$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{h}) = \left(\mu_0 + \frac{\alpha}{\beta+\gamma|\boldsymbol{h}|}\right) \boldsymbol{h}$.

b. Isolant et air environnant: $\mu_r = 1$ and $\sigma = 0$ S.

Précision : Pertes par effet Joules $\int_{\Omega_c} \rho \, |\boldsymbol{j}|^2$



Précision : tension V



1 Méthodes multi-échelles

2 Formulation *h*-conforme
- Problème de référence
- Formulations multi-échelles

3 Applications numériques
- Empilement de tôles 2D
- Empilement de tôles 3D

4 Conclusion et Perspectives

Conclusions et perspectives

Conclusions

Une méthode multi-échelle ***h***-conforme a été developée pour les problèmes 2D et 3D.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Une méthode multi-échelle ***h***-conforme a été developée pour les problèmes 2D et 3D.
Il permet :

- un calul précis des champs homogénéisé et des champs locaux.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Une méthode multi-échelle ***h***-conforme a été developée pour les problèmes 2D et 3D.
Il permet :

- un calul précis des champs homogénéisé et des champs locaux.
- Un calcul précis de grandeurs globales:
  - Les pertes par courants de Foucault,
  - La puissance/énergie magnétique,
  - Le courant/la tension.

Conclusions et perspectives

Travaux en cours

- La validation en cours des formulations multi-échelle $\boldsymbol{h}$-conforme + formulation multi-échelle $\boldsymbol{b}$-conforme. Réduction d'ordre pour réduire le coût de calcul (thèse d'Antoine Marteau).

Conclusions et perspectives

Travaux en cours

- La validation en cours des formulations multi-échelle ***h***-conforme + formulation multi-échelle ***b***-conforme. Réduction d'ordre pour réduire le coût de calcul (thèse d'Antoine Marteau).
- Formulation multi-échelles ***eh*** et modélisation des composites magnétiques doux et des composites obtenus par impression 3D (collaboration avec Janne Ruuskanen et Paavo Rasilo de l'Université Tampere).

Conclusions et perspectives

Travaux en cours

- La validation en cours des formulations multi-échelle ***h***-conforme + formulation multi-échelle ***b***-conforme. Réduction d'ordre pour réduire le coût de calcul (thèse d'Antoine Marteau).
- Formulation multi-échelles ***eh*** et modélisation des composites magnétiques doux et des composites obtenus par impression 3D (collaboration avec Janne Ruuskanen et Paavo Rasilo de l'Université Tampere).